

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.1062

抗剪强度参数概率分布的 最大熵估计及边坡可靠度分析

陈旺旺^{1,2}, 李典庆^{1,2}, 唐小松^{1,2}, 曹子君^{1,2}

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学 水工岩石力学教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 提出了基于最大熵原理的抗剪强度参数概率分布估计方法。首先简要介绍了最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布的基本步骤。其次, 基于模拟数据分别验证了最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率的有效性, 并比较了最大熵原理、选优识别和核密度估计方法的不确定性建模精度和稳健性。最后, 以一组残积土抗剪强度参数试验数据并结合无限边坡稳定分析为例研究了最大熵原理在抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率估计中的应用。结果表明: 最大熵原理能够有效地估计抗剪强度参数的概率分布和边坡失效概率。与传统的选优识别和核密度估计相比, 最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率的精度和稳健性都更高。最大熵原理避免了核密度估计过分依赖有限样本数据的缺点, 又克服了选优识别可能未将真实分布包括在备选概率分布集合中的缺陷。此外, 基于有限数据估计的抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率具有较大的离散性。

关 键 词: 边坡; 可靠度; 抗剪强度参数; 概率分布; 最大熵原理

中图分类号: TU 434

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)04-1469-10

Probability distribution of shear strength parameters using maximum entropy principle for slope reliability analysis

CHEN Wang-wang^{1,2}, LI Dian-qing^{1,2}, TANG Xiao-song^{1,2}, CAO Zi-jun^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering of Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: This paper proposes a new method for modeling the probability distributions of shear strength parameters using maximum entropy principle (MEP). First, the procedure for constructing the probability density functions (PDFs) of shear strength parameters using MEP is presented. Then, Monte Carlo simulations are conducted to validate MEP for modeling the PDFs of shear strength parameters and probability of slope failure. Moreover, the accuracy and robustness of MEP, Akaike Information Criterion (AIC) and kernel density estimation (KDE) are compared. Finally, a dataset of shear strength parameters for residual soil is compiled, and an infinite slope is adopted to demonstrate the application of MEP to the estimation of the probability distributions of shear strength parameters and probability of slope failure. The results indicate that with limited shear strength data, MEP can effectively model the PDFs of shear strength parameters and probability of slope failure. In comparison with AIC and KDE, MEP produces more accurate and robust results for the PDFs of shear strength parameters and probability of slope failure. MEP not only avoids relying too much on the limited shear strength data in KDE, but also overcomes the possibility of excluding the true probability distribution in the set of candidate probability distributions in AIC. Furthermore, there are significant variations in the probability distributions of shear strength parameters and probability of slope failure estimated from limited data.

Keywords: slope; reliability; shear strength parameters; probability distribution; maximum entropy principle

1 引 言

众所周知, 边坡可靠度分析需要事先建立抗剪

强度参数的概率分布模型, 抗剪强度参数概率分布模型是否合理将直接影响边坡可靠度分析结果的准确性, 建立合理的抗剪强度参数概率分布模型是边

收稿日期: 2016-05-11

基金项目: 国家重点研发计划资助 (No. 2017YFC1501301); 国家自然科学基金项目 (No. 51509188, No. 51579190, No. 51779189)。

This work was supported by the National Key R&D Program of China (2017YFC1501301) and the National Natural Science Foundation of China (51509188, 51579190, 51779189).

第一作者简介: 陈旺旺, 男, 1991 年生, 硕士研究生, 主要从事岩土工程可靠度和风险分析方面的研究工作。E-mail: wwchen@whu.edu.cn

通讯作者: 唐小松, 男, 1986 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程可靠度和风险分析方面的研究工作。E-mail: xstang@whu.edu.cn

坡可靠度分析中一个关键问题^[1-4]。实际工程应用中,抗剪强度参数概率分布模型常采用假设检验^[4]、选优识别^[5]和核密度估计^[6]等方法确定。假设检验方法通常根据经验先假定抗剪强度参数服从一种经典分布如正态分布或对数正态分布等,然后通过检验判断在一定显著性水平下该分布是否被接受。假设检验方法概念明确,操作简单,但当试验数据的样本数目较小时,该方法存在多种概率分布形式都可通过检验的问题。如陈立宏等^[4]采用假设检验方法确定抗剪强度参数的概率分布时,发现大部分数据中抗剪强度参数能同时接受正态分布与对数正态分布。然而,不同分布类型对边坡可靠度具有明显的影响。如严春风等^[7]发现当抗剪强度参数服从非正态分布,却被简化为正态分布时将带来高达20%~30%的可靠度计算误差。选优识别方法通常基于 AIC 准则^[8]在备选概率分布集合中识别拟合试验数据最优的概率分布。选优识别方法需要根据工程经验选取一系列概率分布组成备选概率分布集合,当抗剪强度参数的真实分布类型不在集合中时,将导致错误的识别结果^[5]。核密度估计方法是一种非参数的概率分布估计方法,它只需已知试验数据即可估计概率分布,无需事先假设抗剪强度参数服从某一概率分布类型或人为选取备选概率分布集合,克服了假设检验和选优识别方法易受人为主观性影响的缺点。尽管核密度估计方法拥有上述优点,但是它过于依赖有限的样本数据,可能造成过度拟合问题,严重偏离真实分布类型。此外,它还存在窗宽选择的问题。可见,寻找一种既不依赖工程经验、又能准确地拟合抗剪强度参数试验数据的概率分布建模方法,是边坡可靠度分析亟需解决的关键问题。

近年来,最大熵原理^[9]为概率分布模型的构建提供了一种新的途径。信息熵的概念由 Shannon^[9]于 1948 年提出,后经 Jaynes^[10]推广并提出最大熵原理。在信息论中,信息熵代表系统不确定性程度的高低与信息量的多少。最大熵原理的基本思想是对于给定的信息限制,认为熵值最大的概率分布为最无偏、最合理的分布。熵值最大意味着其包含的信息量最小,系统不确定性程度最高,相应地除了给定限制信息外,引入的额外主观信息最少。与核密度估计方法一样,最大熵原理也是一种非参数的概率分布估计方法,无需事先假设抗剪强度参数的分布类型或构建备选概率分布集合。然而,它尽量最少地引入额外主观信息,有效地克服了核密度估计过于依赖有限样本信息的缺陷。因此,最大熵原

理在多个领域得到了成功应用^[11-16]。在岩土工程领域,邓建等^[14]采用最大熵原理推断岩石抗压强度的概率密度函数;郑俊杰等^[15]利用最大熵原理将桩基竖直承载力可靠指标的计算转化为熵密度函数的计算;Shi 等^[16]将最大熵原理应用于功能函数响应的概率建模问题。鉴于最大熵原理的上述优势,有必要将其引入边坡工程,研究其在抗剪强度参数概率分布建模及边坡可靠度分析中的应用。

本文目的在于提出基于最大熵原理的抗剪强度参数概率分布估计方法。为此,简要介绍了最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布的基本过程。基于模拟数据分别验证了最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率的有效性,并比较了最大熵原理、选优识别和核密度估计方法的不确定性建模精度和稳健性。最后以一组残积土抗剪强度参数试验数据并结合无限边坡稳定分析为例研究了最大熵原理在抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率估计中的应用。

2 基于最大熵原理的概率分布估计

在给出概率分布的最大熵估计之前,首先简要介绍信息熵的基本定义。在信息论中,信息熵表示系统提供的信息量的多少,它是系统不确定性程度高低的度量指标。当系统提供的信息越多,则其不确定性程度越低,信息熵越小;反之,当系统提供的信息越少,则其不确定性程度越高,信息熵就越大。对于一个随机变量 x , 它的概率密度函数 $f(x)$ 的信息熵定义为^[9]

$$S(f(x)) = E[-\ln(f(x))] = -\int_R f(x) \ln(f(x)) dx \quad (1)$$

式中: S 为概率密度函数 $f(x)$ 的信息熵; R 为变量 x 的定义域; $E(\cdot)$ 为数学期望。基于有限样本数据仅可获得变量的部分统计信息,无法完整地描述其概率分布。此时,不确定性建模必然有所偏颇。最大熵原理认为,应当倾向于“最随机”的模型,即信息熵最大的模型。因为除此之外的任何模型都或多或少地引入了没有数据支撑的额外信息,这将直接影响不确定性建模的公正性。故拥有最大熵的概率分布为最无偏、最合理的概率分布。

最大熵原理采用的信息限制由两部分组成。第一部分源于概率分布本身特性和参数的概率特性。本文只涉及到概率密度函数需满足的归一化条件:

$$\int_R f(x) dx = 1 \quad (2)$$

另一部分源于样本数据的统计特征:

$$\int_R g_i(x) f(x) dx = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

式中: $g_i(x)$ 为限制条件函数; b_i 为相应的样本统计量。理论上, $g_i(x)$ 的形式可以任意选择, 而实际应用中多采用原点矩, 即 $g_i(x) = x^i$ 或 $E(x^i) = b_i$ 。也有部分学者提出不同的限制条件取法, 如 Zhang 等^[17]提出采用对数化均值 ($E(\ln x) = b_1$) 作为限制条件以保证当 $x \rightarrow 0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$ 。确定限制条件后, 基于最大熵原理的概率分布估计可视为一个最优化问题:

$$\left. \begin{aligned} f(x) \in \arg \max S(f(x)) &= -\int_R f(x) \ln(f(x)) dx \\ \text{s.t.} \quad \int_R f(x) dx &= 1 \\ \int_R g_i(x) f(x) dx &= b_i \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为求解上述最优化问题, 采用常用的拉格朗日乘法。首先建立如下拉格朗日函数:

$$H = -\int_R f(x) \ln(f(x)) dx - \lambda_0 \left(\int_R f(x) dx - 1 \right) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[\int_R g_i(x) f(x) dx - b_i \right] \quad (5)$$

式中: λ_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 为拉格朗日乘子。根据相关理论, 求上述最优化问题的解, 即寻找式 (5) 的极值。故对式 (5) 求导, 得

$$\frac{\partial H}{\partial f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = \exp(-\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)) \quad (6)$$

式 (6) 表明对于任意给定的限制条件, 基于最大熵原理的概率分布 $f(x)$ 都属于 Pearsonian 函数族。将式 (6) 代入式 (2) 和式 (3), 得到一组关于 $m+1$ 个拉格朗日乘子的非线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_R \exp(-\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)) dx &= 1 \\ \int_R g_i(x) \exp(-\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)) dx &= b_i \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

求解上述非线性方程组得到 $m+1$ 个拉格朗日乘子 λ_i ($i = 0, 1, \dots, m$), 将其代入式 (6) 即可得到概率分布 $f(x)$ 。因此, 最大熵原理估计概率分布的基本步骤包括: ①选取信息限制条件 $g_i(x)$; ②求解包含 $m+1$ 个拉格朗日乘子的非线性方程组。

值得注意的是, 上述非线性方程组在限制条件较少且 $g_i(x)$ 形式简单时, 可直接采用 Newton 法求解。但当限制条件增加或 $g_i(x)$ 形式复杂时, Newton 法的计算效率将显著降低, 甚至无法收敛。故国内外学者相继提出一些改进算法以适应复杂情形。如 Wu^[18]提出一种序列更新方法计算熵密度函数; Alibrandi 等^[19]通过引入核密度估计, 提出一种快速的近似求解方法。本文探讨的边坡稳定问题中, 抗

剪强度参数的试验数据较少, 根据有限数据估计的 3、4 阶及更高阶矩均存在较大的变异性, 为此仅采用抗剪强度参数试验数据的前 2 阶原点矩与对数化均值 $E(\ln x)$ 作为样本信息限制条件。在此基础上, 选用 Rockinger 等^[20]所提方法求解式 (7) 所示的非线性方程组, 该方法精度高, 计算简单, 易于编程实现。

下面以一组样本数目 $N = 20$ 的样本数据为例说明最大熵原理估计概率分布的基本步骤。该样本数据为对数正态分布 (均值为 10、标准差为 2) 的一次抽样实现, 具体数值为: {12.39, 10.23, 9.33, 12.14, 10.66, 13.35, 10.87, 11.75, 9.54, 8.25, 9.75, 6.52, 13.51, 12.35, 9.44, 8.81, 8.22, 9.39, 12.87, 13.83}。选取样本数据的前两阶原点矩 $E(x) = b_1$ 和 $E(x^2) = b_2$ 与对数化均值 $E(\ln x) = b_3$ 作为信息限制条件, 相应的 $g_i(x)$ 分别为 x 、 x^2 和 $\ln x$ 。根据上述样本数据可计算得: $E(x) = b_1 = 10.66$, $E(x^2) = b_2 = 117.60$, $E(\ln x) = b_3 = 2.35$ 。根据式 (6), 该样本数据的最大熵分布型式为

$$f(x) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 \ln x) \quad (8)$$

为求解拉格朗日乘子, 根据式 (7) 建立如下非线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_R \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 \ln x) dx &= 1 \\ \int_R x \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 \ln x) dx &= E(x) \\ \int_R x^2 \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 \ln x) dx &= E(x^2) \\ \int_R \ln x \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 \ln x) dx &= E(\ln x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

求解式 (9) 所示的非线性方程组可得: $\lambda_0 = 16.5576$, $\lambda_1 = -2.4010$, $\lambda_2 = 0.1179$, $\lambda_3 = -1.1592$ 。因此, 样本数据的最大熵分布为

$$f(x) = x^{1.1592} \exp(2.4010x - 0.1179x^2 - 16.5576) \quad (10)$$

图 1 给出了式 (10) 所示的最大熵分布的概率密度函数。

3 最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布的有效性检验

3.1 检验方法

上面给出了基于最大熵原理的概率分布估计方法, 下面进一步验证该方法在不同真实分布以及不同样本数目情形下拟合抗剪强度参数概率分布的有效性。为此, 选取其他 3 种概率分布估计方法进行对比。第 1 种方法称为真实分布拟合方法。该方

法不识别具体的分布类型,而直接假设分布类型与真实分布的分布类型相同,相应的分布参数由样本数据确定,可视作不确定性建模的理想情况。第 2 种方法为基于 AIC 准则^[9]的选优识别方法。本文选取对数正态分布、截尾正态分布(零处左截尾)、截尾极值 I 型分布(零处左截尾)、威布尔分布、伽马分布和贝塔分布作为备选分布类型。基于样本数据分别计算出上述 6 种备选概率分布的 AIC 值,并选取具有最小 AIC 值的概率分布作为拟样本数据最优的概率分布类型。第 3 种方法为核密度估计方法,该方法基于样本数据直接采用核密度估计确定样本的概率分布,无需识别最优的分布类型。与最大熵估计一样,上述 3 种概率分布估计方法(即真实分布拟合、选优识别和核密度估计)只需已知样本数据即可估计出该样本的概率分布。基于第 2 节中的样本数据,图 1 给出了最大熵原理、真实分布拟合、选优识别和核密度估计方法得到的样本的概率密度函数。可以看出,不同拟合方法都能大致模拟样本数据的分布,但对分布尾部细节的描述还存在部分偏差。

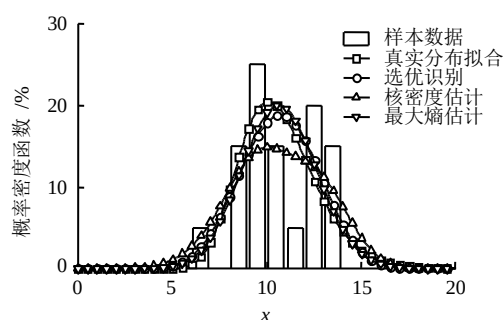


图 1 对数正态分布的一次抽样实现及拟合分布
Fig.1 One sample drawn from a lognormal distribution and the fitted distributions using various methods

为了研究最大熵原理估计概率分布的有效性,选定工程上常用的对数正态分布、截尾正态分布、截尾极值 I 型分布和威布尔分布为真实分布。上述 4 种真实分布的均值都为 10,标准差都为 2。给定真实分布的情形下,就可以模拟服从已知真实分布的不同样本数目 N 的样本数据。基于模拟的样本数据,采用最大熵原理即可估计出样本数据的概率分布,将其与真实分布进行比较并计算拟合误差,从而验证最大熵原理估计真实分布的有效性。令随机变量 x 的真实概率密度函数为 $p(x)$,最大熵原理估计的概率密度函数为 $f(x)$,那么最大熵分布的拟合误差可由下式计算^[21]:

$$Error = \int_R |p(x) - f(x)| dx \quad (11)$$

式中: $Error$ 为最大熵分布的拟合误差。可以看出,拟合误差越小,最大熵分布对真实分布的逼近效果越好。考虑到边坡失效大多发生于岩土体抗剪强度参数较小的情形(概率分布的下尾部),因此,最大熵原理的下尾部建模精度对边坡可靠度分析具有重要影响。为此选取积分区间 $R = [0, \mu - \sigma]$ 计算最大熵分布的下尾部拟合误差,其中, μ 和 σ 分别为真实分布的均值和标准差。同理,基于模拟的样本数据采用真实分布拟合、选优识别和核密度估计也可以估计出样本数据的概率分布,并计算其与真实分布的拟合误差。

由统计学理论可知,样本是一个 N 维随机向量, N 为样本数目。拟合误差是样本的函数,也是一个随机变量。因此,基于模拟的一组样本数据计算的拟合误差只是拟合误差的一个可能取值,它并不能有效地表征最大熵原理拟合真实分布的精度。为此,重复模拟 10 000 组服从已知真实分布的样本数据,每组样本数据的样本数目都为 N 。对于每一组样本数据,分别采用最大熵原理、真实分布拟合、选优识别和核密度估计得到样本数据的概率分布,并计算其与真实分布的拟合误差。因此,10 000 组样本数据可以得到 10 000 个拟合误差,统计可得拟合误差的均值和标准差。本文 3.2 节以拟合误差的均值和标准差为指标比较最大熵原理与真实分布拟合、选优识别和核密度估计方法在拟合概率分布方面的精确性和稳健性。拟合误差的均值越小,该方法的精度越高。同时,拟合误差的标准差越小,该方法的稳健性越强。

3.2 检验结果

首先以样本数目 $N = 20$ 为例分析最大熵原理建模的精度。表 1 给出了 4 种真实分布时不同拟合方法计算的拟合误差的均值和标准差。从表中可以看出,小样本情况下 4 种拟合方法计算的拟合误差都较大,即使采用真实分布类型拟合,拟合误差的均值依然较大。这是由于小样本情况下,样本统计量如均值、标准差和 AIC 值具有较大的变异性^[5],这种变异性进一步影响了概率分布的估计。对于 4 种拟合方法来说,拟合误差最小的是真实分布拟合,其次是最大熵估计,最后是选优识别和核密度估计。由于实际工程中抗剪强度参数的真实分布未知,因此,最大熵估计是常用拟合方法中拟合误差最小的方法。如当真实分布为威布尔分布时,最大熵估计的拟合误差均值为 0.068 4,而选优识别计算的误差

均值为 0.073 9, 同为非参数方法的核密度估计更是高达 0.090 4。此外, 最大熵估计的拟合误差具有最小的标准差, 表明最大熵估计具有最好的建模稳健性。原因在于最大熵估计在对样本信息充分挖掘的同时, 又不过分依赖样本数据点, 表现出对分布类

型更好的适应性。相反, 选优识别和核密度估计过分依赖有限的样本数据点, 而有限样本数据在分布的下尾部存在较大的波动性。总的来说, 最大熵估计对于不同真实分布都具有较好的拟合能力, 它的建模稳健性最佳。

表 1 不同分布拟合方法计算的拟合误差的均值和标准差 ($N = 20$)
Table 1 Means and standard deviations of fitting errors for various methods ($N = 20$)

真实分布	真实分布拟合		选优识别		核密度估计		最大熵估计	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
对数正态	0.054 4	0.036 7	0.059 4	0.035 0	0.069 8	0.040 6	0.056 3	0.033 6
截尾正态	0.054 3	0.036 5	0.064 9	0.038 7	0.082 3	0.040 9	0.064 5	0.036 7
截尾极值 I 型	0.059 2	0.036 0	0.058 3	0.032 4	0.065 8	0.039 2	0.051 1	0.029 5
威布尔	0.054 9	0.039 3	0.073 9	0.040 6	0.090 4	0.040 5	0.068 4	0.039 0

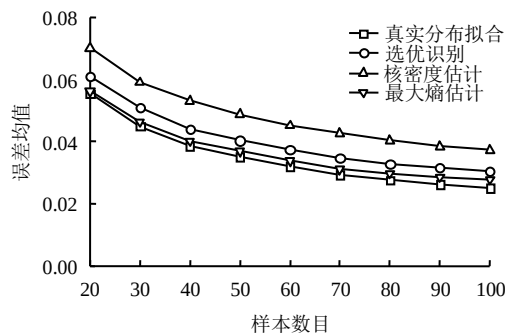
为了进一步研究样本数目对最大熵原理建模精度的影响, 图 2 以真实分布为对数正态分布为例给出了拟合误差的均值和标准差随样本数目变化曲线。可以看出, 不同拟合方法计算的拟合误差的均值和标准差都随样本数目的增加而减小。除了真实分布拟合外, 最大熵估计是其余 3 种拟合方法中具有最小拟合误差均值和标准差的方法, 相反, 核密度估计则具有最大的拟合误差均值和标准差。此外, 最大熵估计的拟合误差均值和标准差亦与真实分布拟合相近, 反映出最大熵估计较好地拟合真实分布

的能力。最大熵估计避免了核密度估计过分依赖有限样本数据点的缺点, 同时无需选择备选概率分布, 从而克服了选优识别可能未将真实分布包括在备选概率分布集合中的缺陷。

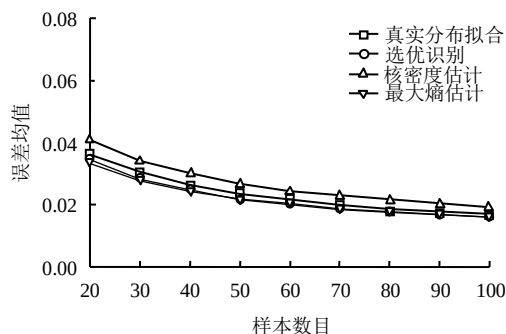
4 最大熵原理估计边坡失效概率的有效性检验

4.1 检验方法

本节进一步验证最大熵原理在边坡失效概率估计中的有效性。为此, 以均质的土坡稳定可靠度问题为例进行分析。边坡的计算模型如图 3 所示, 坡高为 10 m, 坡比为 1: 1.5。抗剪强度参数 c 和 φ 是边坡稳定可靠度分析中最敏感的变量, 因此, 本文仅将 c 和 φ 视为随机变量。 c 的均值为 10 kPa, 标准差为 3 kPa; φ 的均值为 25° , 标准差为 5° 。土体总重度 γ 变异性较小, 故将其视为确定量, 取值为 $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ 。边坡稳定性采用 GeoStudio 软件中的 SLOPE/W 模块计算, 安全系数选用简化毕肖普法计算。通过假设 c 和 φ 的真实分布类型为对数正态分布、截尾正态分布、截尾极值 I 型分布和威布尔分布, 采用自行编写的可靠度分析的响应面法^[22]即可计算边坡的真实失效概率。基于 c 和 φ 的真实分布计算的边坡真实失效概率是一常数。



(a) 拟合误差均值



(b) 拟合误差标准差

图 2 拟合误差的均值和标准差随样本数目变化曲线
Fig.2 Variation of the mean and standard deviation of fitting errors for various methods with sample size

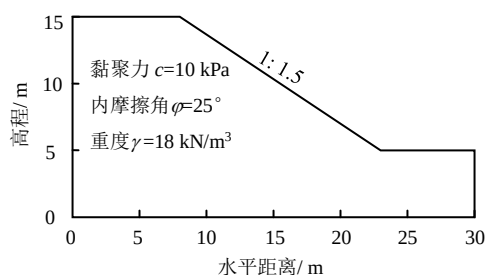


图 3 均质土坡模型
Fig.3 Homogeneous soil slope model

如前所述, c 和 φ 的真实分布类型为对数正态分布、截尾正态分布、截尾极值 I 型分布和威布尔分布, 其中 c 和 φ 的均值分别为 10 kPa 和 25° , 标准差分别为 3 kPa 和 5° 。给定真实分布的情形下, 就可以模拟服从已知真实分布的不同样本数目 N 的 c 和 φ 的样本数据。基于模拟的 c 和 φ 样本数据, 采用最大熵原理即可估计出 c 和 φ 样本数据的概率分布, 并采用响应面法计算边坡失效概率, 将其与真实失效概率进行比较, 从而验证最大熵原理估计边坡真实失效概率的有效性。令边坡真实失效概率为 p_f , 最大熵原理估计的失效概率为 $\bar{p}_f$, 那么最大熵分布估计的边坡失效概率相对误差为

$$\text{Relative Error} = \frac{|p_f - \bar{p}_f|}{p_f} \times 100\% \quad (12)$$

式中: *Relative Error* 为最大熵分布估计的边坡失效概率相对误差。相对误差越小, 最大熵分布对真实失效概率的逼近效果越好。同理, 基于模拟的 c 和 φ 样本数据采用真实分布拟合、选优识别和核密度估计也可以估计出 c 和 φ 样本数据的概率分布, 并计算边坡失效概率, 从而得到其与真实失效概率的相对误差。

基于模拟的有限样本数据计算的边坡失效概率及其与真实失效概率的相对误差都是样本的函数, 也都是随机变量。为此, 重复模拟 10 000 组服从已知真实分布的 c 和 φ 样本数据, 每组样本数据的样本数目都为 N 。对于每一组 c 和 φ 的样本数据, 分别采用最大熵原理、真实分布拟合、选优识别和核密度估计得到 c 和 φ 样本数据的概率分布, 并计算边坡失效概率, 从而得到其与真实失效概率的相对误差。因此, 10 000 组 c 和 φ 样本数据可以得到 10 000 个边坡失效概率和相对误差, 统计可得相对误差的均值和标准差。本文 4.2 节以边坡失效概率相对误差的均值和标准差为指标比较最大熵原理与真实分布拟合、选优识别和核密度估计方法在估计边坡失效概率方面的精确性和稳健性。相对误差的均值越小, 该方法的精度越高。同时, 相对误差的标准差越小, 该方法的稳健性越强。

4.2 检验结果

图 4 以真实分布为对数正态分布为例给出了 4 种概率分布拟合方法计算的边坡失效概率。图中还给出了真实分布计算的边坡真实失效概率 (见竖线)。可以看出, 小样本情况下不同拟合方法计算的边坡失效概率都具有较大的变异性, 它们与真实失效概率相比都具有不同程度的差异。与真实失效概率为常数值不同, 基于有限样本数据计算的失效概

率是一个分布 (10 000 个失效概率估计而来)。4 种拟合方法中, 最大熵原理计算的边坡失效概率与真实分布拟合计算的边坡失效概率最接近, 而核密度估计计算的边坡失效概率与真实分布拟合相差最大, 且核密度估计的结果明显高估了边坡真实失效概率。此外, 对比图 4(a)~4(c)可以看出, 边坡失效概率的变异性随样本数目的增加而减小, 并逐渐收敛于边坡真实失效概率。

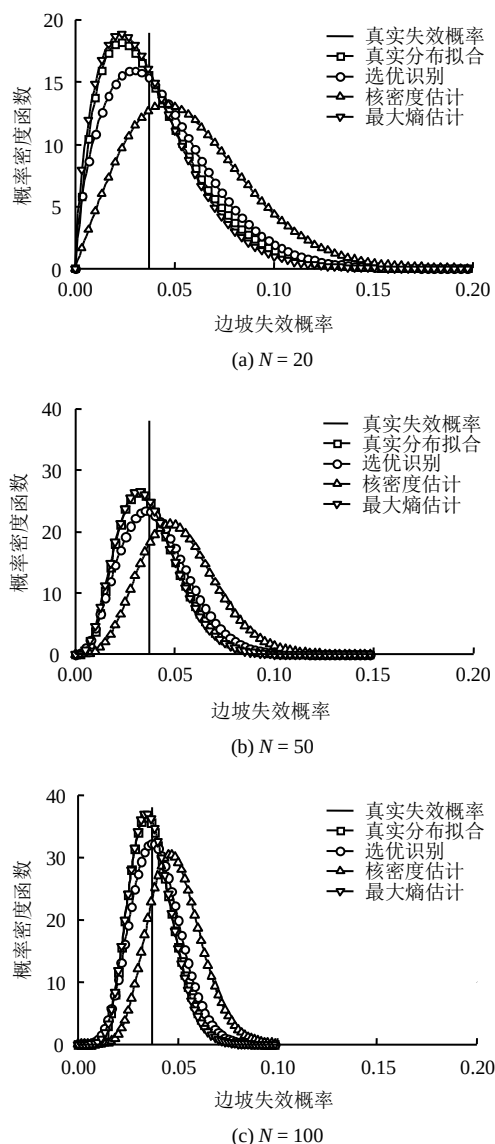


图 4 不同拟合方法计算的边坡失效概率分布
Fig.4 Probabilities of slope failure using various fitting methods for shear strength parameters

表 2 给出了不同真实分布情形下 4 种概率分布拟合方法计算的边坡失效概率相对误差的均值和标准差。可以看出, 小样本情况下 4 种方法计算的边坡失效概率相对误差都较大。对于 4 种拟合方法来说, 相对误差最小的是最大熵估计, 其次是真实分布拟合, 最后是选优识别和核密度估计。此外, 真

实分布类型对边坡失效概率相对误差也有重要影响。当真实分布为威布尔分布时,4种拟合方法计算的边坡失效概率相对误差最小,而当真实分布为截尾极值I型分布时,4种拟合方法计算的边坡失

效概率相对误差最大。对于研究的4种真实分布类型,最大熵估计得到的边坡失效概率相对误差的标准差都最小,说明最大熵估计计算边坡失效概率具有最好的稳健性。

表2 不同分布拟合方法计算的边坡失效概率相对误差的均值和标准差($N=20$)(单位: %)

Table 2 Means and standard deviations of relative errors in probability of slope failure for various methods ($N=20$) (unit: %)

真实分布	真实分布拟合		选优识别		核密度估计		最大熵估计	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
对数正态	53.54	44.63	56.85	48.07	77.16	67.27	50.21	39.37
截尾正态	46.70	38.13	49.58	38.36	57.20	48.73	46.58	34.70
截尾极值I型	70.56	64.82	89.10	81.84	105.40	90.76	55.61	47.98
威布尔	43.61	35.72	48.78	36.53	53.89	45.18	44.33	32.76

图5给出了边坡失效概率相对误差的均值和标准差随样本数目变化曲线。边坡失效概率相对误差的均值和标准差都随样本数目的增加而减小。特别当样本数目小于100时,增加抗剪强度参数的试验数据能够有效地减小失效概率相对误差和增加边坡可靠度估计的稳健性。

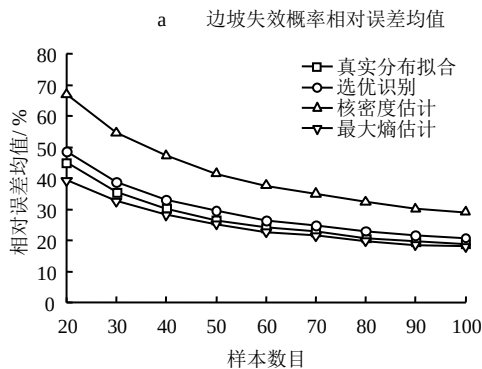
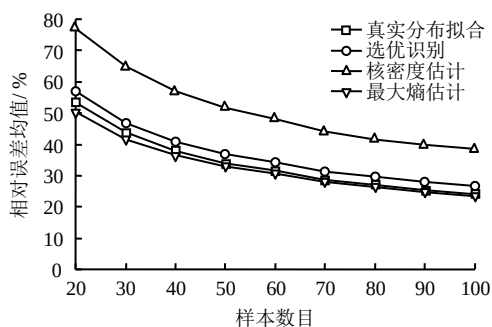


图5 边坡失效概率相对误差的均值和标准差随样本数目变化曲线

Fig.5 Variation of the mean and standard deviation of relative errors in probability of slope failure for various methods with sample size

5 算例

5.1 抗剪强度参数试验数据

在验证了最大熵原理估计抗剪强度参数概率分

布和边坡可靠度的有效性后,下面进一步研究该方法在实际工程中的应用。值得注意的是,实际工程中抗剪强度参数的真实分布是未知的,因此,不能基于真实分布模拟样本数据,而应该采用室内或现场试验的方法获得抗剪强度参数的试验数据。本文选用文献[23]中残积土抗剪强度参数试验数据进行分析。试验所用残积土来自新加坡裕廊地区的沉积地层,表3中给出了24组实测的抗剪强度参数试验数据。显然,这是典型的小样本容量数据。基于有限试验数据,采用最大熵原理建立抗剪强度参数的概率分布,为后续的边坡可靠度分析奠定基础,正是本文研究的目的。

表3 抗剪强度参数试验数据

Table 3 Measured cohesions and friction angles

试验编号	c / kPa	φ / (°)	试验编号	c / kPa	φ / (°)
1	9	33	13	10	37
2	14	30	14	11	33
3	19	25	15	14	29
4	13	32	16	7	35
5	8	36	17	12	33
6	12	31	18	16	31
7	18	29	19	12	34
8	8	33	20	12	34
9	9	30	21	8	35
10	11	29	22	6	38
11	10	35	23	9	32
12	14	31	24	16	31

5.2 抗剪强度参数概率分布的最大熵估计

考虑到表3中的抗剪强度参数试验数据的样本数目仅为24,数据容量相对不足,相应的样本统计信息具有较大变异性,无法保证高阶矩的稳定性。因此,在采用最大熵原理估计概率分布函数时,仅选用较稳定的前两阶原点矩($E(x) = b_1$ 、 $E(x^2) = b_2$)与对数化均值 $E(\ln x) = b_3$ 作为样本信息限制条件,相应的 $g_i(x)$ 分别为 x 、 x^2 和 $\ln x$,从而实现对本样信

息充分挖掘的同时又避免引入不稳定信息。通过计算,黏聚力 c 的样本信息限制条件为: $E(c) = 11.58$, $E(c^2) = 145.5$, $E(\ln c) = 2.41$; 内摩擦角 φ 的样本信息限制条件为: $E(\varphi) = 32.33$, $E(\varphi^2) = 1053.8$, $E(\ln \varphi) = 3.47$ 。基于上述限制信息和概率密度函数归一化条件求解式 (7) 或式 (9) 所示的非线性方程组可得黏聚力 c 的拉格朗日乘子: $\lambda_0 = 19.9277$, $\lambda_1 = 1.7624$, $\lambda_2 = -0.0166$, $\lambda_3 = -14.6784$ 。将拉格朗日乘子代入式 (8) 可得黏聚力 c 的最大熵分布为

$$f(x) = x^{14.6784} \exp(-1.7624x + 0.0166x^2 - 19.9277) \quad (13)$$

同理,可得内摩擦角 φ 的拉格朗日乘子为: $\lambda_0 = -257.2533$, $\lambda_1 = -14.2765$, $\lambda_2 = -0.1413$, $\lambda_3 = 164.8838$ 。将拉格朗日乘子代入式 (8) 可得内摩擦角 φ 的最大熵分布为

$$f(x) = x^{-164.8838} \exp(14.2765x - 0.1413x^2 + 257.2533) \quad (14)$$

由于最大熵分布对拉格朗日乘子较为敏感,故对于计算结果尽量保留 4 位或更多位小数以减少误差。图 6 给出了 c 和 φ 的最大熵分布。为了对比,还给出了选优识别和核密度估计得到的概率分布。可以看出,3 种概率分布拟合方法都能有效地反映抗剪强度参数试验数据的概率分布特性。相比选优识别和核密度估计,最大熵分布能够更好地拟合 c 和 φ 的试验数据。

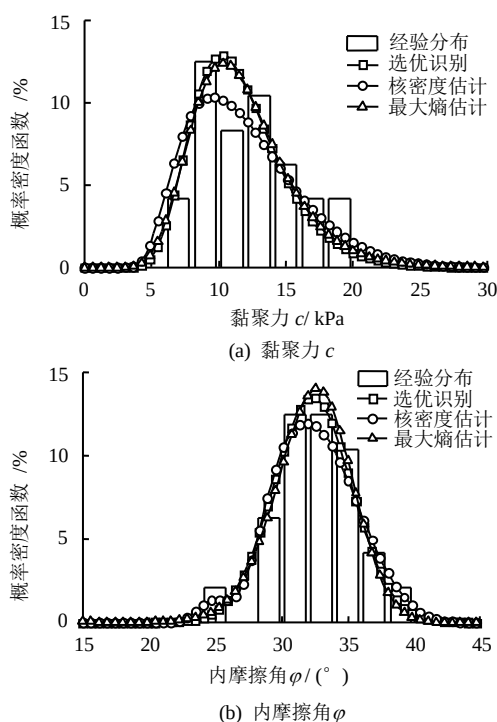


图 6 实测数据的样本直方图与拟合概率密度曲线
Fig.6 Comparison between density estimators using various methods and the histogram of sample

5.3 无限边坡稳定可靠度分析

建立了抗剪强度参数 c 和 φ 的概率分布之后,即可开展边坡可靠度分析。鉴于残积土通常分布于边坡浅层,而无限边坡稳定分析模型常常应用于浅层滑坡的稳定性评价,下面以简单的无限边坡为例说明最大熵分布在边坡可靠度分析中的应用。无限边坡是边坡稳定性分析一种实用的简化模型,稳定分析模型如图 7 所示。在忽略孔隙水压力的情况下,边坡安全系数 FS 由下式计算^[24]:

$$FS = \frac{c}{\gamma H \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \quad (15)$$

式中: c 和 φ 分别为潜在滑动面上土体的有效黏聚力和有效内摩擦角; H 为潜在滑动面以上土层厚度; α 为边坡倾角; γ 为土体总重度。边坡几何参数取值分别为 $H = 5$ m、 $\alpha = 35^\circ$ 。将抗剪强度参数 c 和 φ 视为随机变量,它们的概率分布函数如图 6 所示。此外,土体总重度 $\gamma = 17$ kN/m³ 为确定量。

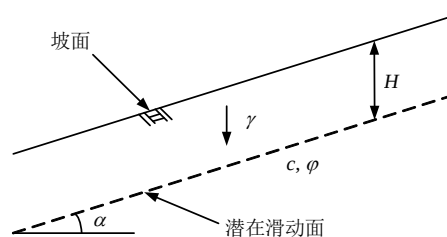


图 7 无限边坡稳定分析模型
Fig.7 Infinite slope model

鉴于式 (15) 所示的无限边坡的安全系数具有显式表达式,可以采用直接积分法计算边坡的失效概率。当 $H = 5$ m、 $\alpha = 35^\circ$ ($FS = 1.2$) 时,基于最大熵估计、选优识别和核密度估计得到的概率分布计算的边坡失效概率分别为 6.28×10^{-2} 、 6.15×10^{-2} 和 8.35×10^{-2} 。可以看出,最大熵原理计算的边坡失效概率与选优识别结果基本一致,而核密度估计结果则明显偏大,这与前文所得结论相同。为观察失效概率变化对结果的影响,进行参数敏感性分析,如保持 $\alpha = 35^\circ$ 不变将 H 由 5 m 缓慢降至 2.46 m,或保持 $H = 5$ m 不变将 α 由 35° 缓慢降至 28.44° ,相应的边坡安全系数 FS 由 1.2 增加为 1.5。敏感性分析结果如表 4 所示。边坡安全系数随土层厚度或边坡倾角的减小而增大,相应的失效概率则逐渐降低,不同概率分布拟合方法计算的边坡失效概率差别逐渐增大。如当 $H = 2.46$ m, $\alpha = 35^\circ$ ($FS = 1.5$) 时,基于最大熵估计的失效概率为 1.72×10^{-3} ,基于选优识别的失效概率为 1.04×10^{-3} ,而基于核密

度估计的失效概率为 3.81×10^{-3} 。不管边坡失效概率如何变化，基于选优识别计算的边坡失效概率都最小，从工程安全角度来说偏危险；而基于核密度估计计算的边坡失效概率都最大，结果偏保守，造成经济上的浪费；相反，基于最大熵原理计算的边

坡失效概率则介于二者之间，在安全性与经济性之间实现了较好的平衡。结合前文所得结论，最大熵原理具有最小的失效概率相对误差均值和标准差，结果最为可信和稳健，建议选用最大熵原理计算的边坡失效概率进行边坡加固设计。

表4 不同抗剪强度参数概率分布拟合方法计算的边坡可靠度结果

Table 4 Reliability results of slope stability produced by various fitting methods for shear strength parameters

安全系数 FS	选优识别		核密度估计		最大熵估计	
	失效概率	可靠指标	失效概率	可靠指标	失效概率	可靠指标
$FS = 1.2 (H = 5.00 \text{ m}, \alpha = 35.00^\circ)$	6.15×10^{-2}	1.54	8.35×10^{-2}	1.38	6.28×10^{-2}	1.53
$FS = 1.3 (H = 3.72 \text{ m}, \alpha = 35.00^\circ)$	1.62×10^{-2}	2.14	3.01×10^{-2}	1.88	1.88×10^{-2}	2.08
$FS = 1.4 (H = 2.96 \text{ m}, \alpha = 35.00^\circ)$	4.08×10^{-3}	2.65	1.08×10^{-2}	2.30	5.61×10^{-3}	2.54
$FS = 1.5 (H = 2.46 \text{ m}, \alpha = 35.00^\circ)$	1.04×10^{-3}	3.08	3.81×10^{-3}	2.67	1.72×10^{-3}	2.93
$FS = 1.2 (H = 5.00 \text{ m}, \alpha = 35.00^\circ)$	6.15×10^{-2}	1.54	8.35×10^{-2}	1.38	6.28×10^{-2}	1.53
$FS = 1.3 (H = 5.00 \text{ m}, \alpha = 32.51^\circ)$	1.23×10^{-2}	2.25	2.43×10^{-2}	1.97	1.54×10^{-2}	2.16
$FS = 1.4 (H = 5.00 \text{ m}, \alpha = 30.34^\circ)$	2.08×10^{-3}	2.87	7.15×10^{-3}	2.45	3.31×10^{-3}	2.71
$FS = 1.5 (H = 5.00 \text{ m}, \alpha = 28.44^\circ)$	3.08×10^{-4}	3.42	1.41×10^{-3}	2.98	5.54×10^{-4}	3.26

6 结 论

(1) 最大熵原理能够有效地估计抗剪强度参数的概率分布和边坡失效概率。该方法估计概率分布时，只需已知抗剪强度参数的试验数据，无需构建备选概率分布集合，是一种典型的非参数方法。最大熵原理对于工程上常见的各种真实概率分布和样本数目都能给出有效的估计结果，为有限数据条件下抗剪强度参数概率分布的确定和边坡失效概率的估计提供了一条有效的途径。

(2) 与传统的概率分布估计方法如选优识别和核密度估计相比，最大熵原理在对样本信息充分利用的同时，又不过分依赖样本数据。最大熵原理避免了核密度估计过分依赖有限样本数据的缺点，又克服了选优识别可能未将真实分布包括在备选概率分布集合中的缺陷。

(3) 最大熵原理估计抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率的精度和稳健性都比选优识别和核密度估计方法更高，尤其在样本数目较小的情况下表现得更为明显。此外，基于最大熵原理估计的边坡失效概率在安全性与经济性之间实现了较好的平衡。建议优先选用最大熵原理估计抗剪强度参数的概率分布和边坡失效概率。

(4) 基于有限数据估计的抗剪强度参数概率分布和边坡失效概率具有较大的离散性，这是由于有限数据条件下样本统计量具有较大变异性决定的。这种变异性是客观存在和不可消除的，它只能通过增加抗剪强度参数试验数据的样本数目尽量减小。因

此，实际工程中建议尽可能多地收集岩土体抗剪强度参数的试验数据。

参 考 文 献

- [1] LUMB P. Safety factors and the probability distribution of soil strength[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1970, 7(3): 225—242.
- [2] 罗冲, 殷坤龙, 陈丽霞, 等. 万州区滑坡滑带土抗剪强度参数概率分布拟合及其优化[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(9): 1588—1593.
LUO Chong, YIN Kun-long, CHEN Li-xia, et al. Probability distribution fitting and optimization of shear strength parameters in sliding zone along horizontal-stratum landslides in Wanzhou city[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(9): 1588—1593.
- [3] 范明桥. 黏性填筑土强度指标 φ, c 的概率特性[J]. 南京水利科学研究院报, 2000, (1): 49—53.
FAN Ming-qiao. Probabilistic property of shear strength parameters φ, c of refilled clay[J]. **Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute**, 2000, (1): 49—53.
- [4] 陈立宏, 陈祖煜, 刘金梅. 土体抗剪强度指标的概率分布类型研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 37—40.
CHEN Li-hong, CHEN Zu-yu, LIU Jin-mei. Probability distribution of soil strength[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(1): 37—40.
- [5] 唐小松, 李典庆, 曹子君, 等. 有限数据条件下边坡可靠度分析的 Bootstrap 方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(3):

- 893—901.
- TANG Xiao-song, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. A Bootstrap method for analyzing slope reliability based on limited shear-strength parameter data[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(3): 893—901.
- [6] 宫凤强, 侯尚骞, 岩小明. 基于正态信息扩散原理的 Mohr-Coulomb 强度准则参数概率模型推断方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(11): 2225—2234.
- GONG Feng-qiang, HOU Shang-qian, YAN Xiao-ming. Probability model deduction method of Mohr-Coulomb criteria parameters based on normal information diffusion principle[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2013, 32(11): 2225—2234.
- [7] 严春风, 刘东燕, 张建辉, 等. 岩土工程可靠度关于强度参数分布函数概型的敏感度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 36—39.
- YAN Chun-feng, LIU Dong-yan, ZHANG Jian-hui, et al. The susceptibility analysis of reliability for the probability distribution types of parameters in strength criterion[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1999, 18(1): 36—39.
- [8] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1974, 19(6): 716—723.
- [9] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. **The Bell Technical Journal**, 1948, 27(3): 379—423.
- [10] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. **Physical Review**, 1957, 106(4): 620—630.
- [11] SINGH V P, LUO H. Entropy theory for distribution of one-dimensional velocity in open channels[J]. **Journal of Hydrologic Engineering**, 2011, 16(9): 725—735.
- [12] SOIZE C. Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle: Applications to stochastic processes, random fields and random matrices[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2008, 76(10): 1583—1611.
- [13] ABBAS A E. Entropy methods for joint distributions in decision analysis[J]. **IEEE Transactions on Engineering Management**, 2006, 53(1): 146—159.
- [14] 邓建, 李夕兵, 古德生. 岩石力学参数概率分布的信息熵推断[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(13): 2177—2181.
- DENG Jian, LI Xi-bing, GU De-sheng. Probability distribution of rock mechanics parameters by using maximum entropy method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(13): 2177—2181.
- [15] 郑俊杰, 徐志军, 刘勇, 等. 基于最大熵原理的基桩竖向承载力的可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(11): 1643—1647.
- ZHENG Jun-jie, XU Zhi-jun, LIU Yong, et al. Reliability analysis for vertical bearing capacity of piles based on the maximum entropy principle[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2010, 32(11): 1643—1647.
- [16] SHI X H, TEIXEIRA A P, ZHANG J, et al. Structural reliability analysis based on probabilistic response modelling using the maximum entropy method[J]. **Engineering Structures**, 2014, 70(9): 106—116.
- [17] ZHANG L Z, XU D L. A new maximum entropy probability function for the surface elevation of nonlinear sea waves[J]. **China Ocean Engineering**, 2005, 19(4): 637—646.
- [18] WU X M. Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution[J]. **Journal of Econometrics**, 2003, 115(2): 347—354.
- [19] ALIBRANDI U, RICCIARDI G. Efficient evaluation of the pdf of a random variable through the kernel density maximum entropy approach[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2008, 75(13): 1511—1548.
- [20] ROCKINGER M, JONDEAU E. Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis[J]. **Journal of Econometrics**, 2002, 106(1): 119—142.
- [21] WUN L M, PEARN W L. Assessing the statistical characteristics of the mean absolute error or forecasting[J]. **International Journal of Forecasting**, 1991, 7(3): 335—337.
- [22] WONG F S. Slope reliability and response surface method[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1995, 111(1): 32—53.
- [23] RAHARDJO H, SATYANAGA A, LEONG E C, et al. Variability of residual soil properties[J]. **Engineering Geology**, 2012, 141—142: 124—140.
- [24] GRIFFITHS D V, HUANG J S, FENTON G A. Probabilistic infinite slope analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2011, 38(4): 577—584.